

RAZÕES E PROPORÇÕES

a) RAZÃO

Razão entre um número **a** e um número **b** ($b \neq 0$) é o quociente $\frac{a}{b}$ que também se indica $a : b$.

A razão $\frac{a}{b}$ ou $a : b$ pode ser lida : "razão entre a e b" ou "razão de a para b" ou simplesmente "a está para b". Na razão $\frac{a}{b}$, a denomina-se antecedente e b conseqüente.

Exemplos:

Calcule a razão entre o primeiro e o segundo números:

a) 15 e 12 $\rightarrow \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$

b) $\frac{3}{5}$ e $\frac{6}{15} \rightarrow \frac{3}{5} \cdot \frac{15}{6} = \frac{3}{2}$

b) RAZÃO INVERSAS

Duas razões são inversas quando o produto entre delas vale 1.

Exemplo: $\frac{2}{7}$ e $\frac{7}{2}$ são inversas, pois $\frac{2^1}{7^1} \cdot \frac{7^1}{2^1} = 1$

EXERCÍCIOS:

26) Calcule a razão entre as grandezas:

- a) 1 m^2 e 100 dm^2
- b) 1 Km e 1 mm

27) Eduardo tem 12 anos e seu pai 36 anos. Calcule a razão entre as idades de Eduardo e de seu pai.

28) Dos 50 alunos de uma classe, 35 são meninas. A razão entre o número de meninos e o número de meninas é:

29) (TRF-94) A razão entre os números 2,5 e 0,125, nessa ordem, é

- a) $1/20$ b) $1/4$ c) $1/2$ d) 20 e) 40

30) Duas grandezas não-nulas x e y são tais que

$\frac{1}{3} = x$ e $\frac{4}{7} = y$. Logo, a razão $\frac{x}{y}$ vale ?

31) Numa razão, o conseqüente vale $\frac{3}{4}$ do antecedente. A razão é:

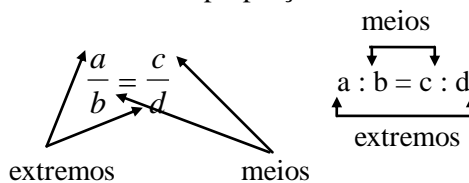
c) PROPORÇÕES

Se uma razão $\frac{a}{b}$ for igual a uma razão $\frac{c}{d}$ ambas formam uma sentença denominada proporção.

Ex.: $\frac{2}{6} = \frac{15}{45} \rightarrow$ É uma proporção, pois as razões são iguais, isto é, valem $\frac{1}{3}$.

Indicamos as proporções assim: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ou $a : b = c : d$

Onde **a** e **d** são chamados extremos da proporção e **b** e **c** são chamados meios da proporção.



• **Propriedade fundamental das proporções**

Em qualquer proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Demonstrando: $\frac{2}{6} = \frac{15}{45} \rightarrow \overbrace{2 \times 45}^{\text{EXTREMOS}} = \overbrace{6 \times 15}^{\text{MEIOS}} = 90$

EXERCÍCIOS

32) Calcule x:

a) $\frac{x}{3} = \frac{8}{6} \Leftrightarrow 6x = 3 \cdot 8 \Leftrightarrow x = \frac{24}{6} \Leftrightarrow x = 4$

b) $\frac{2}{x} = \frac{10}{25}$

c) $\frac{3}{7} = \frac{x}{21}$

d) $\frac{5}{9} = \frac{20}{x}$

e) $\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

f) $\left(1 - \frac{1}{2}\right) : x = \frac{1}{2} : 4$

g) $\frac{x-1}{3+x} = \frac{5}{9}$

- 33) Por 3 m de tecido paguei R\$ 540. Quanto pagarei por 5 m do mesmo tecido?
- 34) x está para 5 assim como 4 está para 10. Qual o valor de x?
- 35) Uma planta de casa está desenhada na escala 1: 100. Entre a porta da sala e a porta da cozinha mediu-se na planta a distância de 12,7 cm. Qual a distância real em metros?
- 36) Um terreno retangular tem dimensões de 5 m e 7 m e custa R\$ 1.400.000,00. Sabendo que as áreas e os preços formam uma proporção, quanto custará um terreno quadrado cujo lado tem 7 m?
- 37) Determine dois números tais que a razão entre eles é igual a $\frac{2}{3}$ e cuja soma é 25.
- 38) Determine dois números positivos, tais que sua razão é igual a $\frac{5}{4}$ e cuja diferença vale 7.
- 39) (TJ - MS) A diferença entre dois números é 75. O maior deles está para 5, assim como o menor está para 2. Esses números são?
- 40) Quando Ana nasceu, Lúcia tinha 28 anos. Hoje, a razão da idade de Ana para a de Lúcia é 0,75. Qual é a idade de Ana?
- 41) Quatro números apresentam as seguintes proporções: o primeiro está para o segundo assim como 1 para 2; o terceiro está para o quarto assim como 3 para 4 e o primeiro está para o quarto assim como 1 para 3. O dobro do maior deles supera a soma dos três outros em 12 unidades. Qual é o valor de cada um deles?

d) DIVISÃO PROPORCIONAL

NÚMEROS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Dada duas sequencias de números, dizemos que eles são diretamente proporcionais quando apresentam uma razão igual na ordem que se apresentam.

Ex.:

2, 5, 6, 9 e

6, 15, 18, 27 são diretamente proporcionais, pois:

$$\frac{2}{6} = \frac{5}{15} = \frac{6}{18} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3} \rightarrow \text{coeficiente de proporcionalidade}$$

NÚMEROS PROPORCIONAIS. INVERSAMENTE

Se duas sequencias de números são inversamente proporcionais, o produto de dois números correspondentes é constante.

Ex.:

3, 5, 6, 10 e

20, 12, 10, 6 são inversamente proporcionais, pois:

$$3 \times 20 = 5 \times 12 = 6 \times 10 = 10 \times 6 = \boxed{60} \rightarrow \text{coeficiente de proporcionalidade}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

- 1) Dividir o número 8 em 3 partes diretamente proporcionais a 3, 9 e 12 respectivamente:

Solução:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{9} = \frac{z}{12} = \frac{x+y+z}{3+9+12} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3} \quad \text{logo:}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 1$$

$$\frac{y}{9} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow y = 3$$

$$\frac{z}{12} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow z = 4$$

- 2) Dividir o número 190 em três partes inversamente proporcionais a 4, 6 e 9, respectivamente:

Solução:

$$x + y + z = 190$$

$$4x = k \Leftrightarrow x = \frac{k}{4} \quad \frac{k}{4} + \frac{k}{6} + \frac{k}{9} = 190$$

$$6y = k \Leftrightarrow y = \frac{k}{6} \quad \frac{9k + 6k + 4k}{36} = 190$$

$$9z = k \Leftrightarrow z = \frac{k}{9} \quad k = 360$$

$$x = \frac{360}{4} \Leftrightarrow x = 90$$

$$y = \frac{360}{6} \Leftrightarrow y = 60$$

$$z = \frac{360}{9} \Leftrightarrow z = 40$$

EXERCÍCIOS

- 42) Obter as três partes do número 42, proporcionais a 1, 2 e 3.

- 43) Sabendo que $\frac{m}{35} = \frac{n}{30} = \frac{p}{5}$ e que $m + n - p = 24$, calcule m, n e p.

- 44) Dividir o número 144 em partes inversamente proporcionais a 3, 4 e 12.

- 45) 12, 15, 24, 30 e a, b, c, d são inversamente proporcionais. Sabendo que o coeficiente de proporcionalidade é 120, calcule a, b, c e d.

46) Determine três números cuja soma é 119, sabendo que o primeiro está para 3 assim como o segundo está para 5, assim como o terceiro está para 9.

47) Sabendo que 2,3,4,6 e x,y,6,z são inversamente proporcionais, calcule $(x + y) \cdot z$

48) 3,5,8,10 e a,b,c,d são diretamente proporcionais.

Sabendo que o coeficiente de proporcionalidade é $\frac{1}{5}$, calcule a,b,c e d.

49) (PRF/98) Duas grandezas a e b foram divididas, respectivamente em partes diretamente proporcionais a 3 e 4 na razão 1,2. O valor de $3a + 2b$ é:

- a) 6,0 b) 8,2 c) 8,4 d) 14,4 e) 20,4

e) DIVISÃO PROPORCIONAL MISTA

Chamamos de divisão proporcional mista (composta) à divisão de um número em partes que devem ser ao mesmo tempo proporcionais e inversamente proporcionais a duas sequencias numéricas.

Ex.:

Dividir o número 178 em três partes que devem ser diretamente proporcionais aos números 2,3 e 4 e inversamente proporcionais aos números 3,2 e 5, respectivamente.

Resolução:

Dividimos 178 em três partes: A, B e C.

Invertendo os números que deverão ser divididos em partes inversamente proporcionais, obtemos:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \text{ e } \frac{1}{5}$$

Calculamos o mínimo múltiplo comum (mmc) e usaremos os novos denominadores:

$$\frac{1}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{\frac{2}{15}} = \frac{1}{\frac{5}{6}} \Rightarrow \frac{10}{30} = \frac{15}{30} \text{ e } \frac{6}{30} \rightarrow 10, 15 \text{ e } 6$$

As três partes direta e inversamente proporcionais formarão um produto com uma constante "k", devemos Ter:

A será proporcional a 2 e 10 $\rightarrow 2 \times 10 = 20 \rightarrow A = 20k$

B será proporcional a 3 e 15 $\rightarrow 3 \times 15 = 45 \rightarrow B = 45k$

C será proporcional a 4 e 6 $\rightarrow 4 \times 6 = 24 \rightarrow C = 24k$

$$A + b + C = 178 \Rightarrow 20k + 45k + 24k = 178$$

$$98k = 178$$

$$k = 2$$

Assim, com $k=2$ temos:

$$A = 20k = 20 \times 2 = 40$$

$$B = 45k = 45 \times 2 = 90$$

$$C = 24k = 24 \times 2 = 48$$

Portanto as três partes procuradas são: 40, 90 e 48.

EXERCÍCIOS

50) Dividir 1700 em partes diretamente proporcionais a 2 e 5 e inversamente proporcionais a 4 e 7.

51) Dividir 108 em partes diretamente proporcionais a 2 e 3 inversamente proporcional a 5 e 6.

52) (Colégio Naval) Divide-se 105 em três partes a, b e c, que são ao mesmo tempo diretamente proporcionais a 3,2 e 5 e inversamente proporcionais a 5,3 e 6, respectivamente. Qual a menor destas partes?

REPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

26) a) 1 b) 1.000.000

27) $\frac{1}{3}$

28) $\frac{3}{7}$

29) d

30) $\frac{7}{12}$

31) $\frac{4}{3}$

32) b) 5 c) 9 d) 36 e) $\frac{1}{3}$ f) 4 g) 6

33) R\$ 900

34) 2

35) 12,7 m

36) R\$ 1.960.000

37) 10 e 15

38) 35 e 28

39) 125 e 50

40) 84 anos

41) 16, 32,36 e 48

42) $x = 7$ $y = 14$ $z = 21$

43) $m = 14$ $n = 12$ $p = 2$

44) $x = 72$ $y = 54$ $z = 18$

45) $a = 10$ $b = 8$ $c = 5$ $d = 4$

46) $x = 21$ $y = 35$ $z = 63$

47) 80

48) $a=15$ $b = 25$ $c = 40$ $d = 50$

49) e

50) 1000 e 700

51) 48 e 60

52) 30